

一种随机 Petri 网性能等价化简与分析方法

林 闯,曲 扬,郑 波,田立勤

(清华大学计算机科学与技术系,北京 100084)

摘 要: 随机 Petri 网模型是系统性能评价的有力工具,但其状态空间随模型规模的增长而指数性增长的问题限制了其对复杂和大规模系统模型的性能数量分析能力.因此,在对模型进行分析之前,先对其进行适当的性能等价化简,是一种更为可行的分析方法.本文首先讨论了一类随机 Petri 网 - 基本随机 Petri 网 (ESPN) 的性能等价分析方法,这类随机 Petri 网由顺序、并行、选择和循环等四种基本结构及其组合构成.作者推导出这四种基本结构的性能等价公式,并运用自底向上逐步综合替代的分层分析方法,给出这类随机 Petri 网模型的性能等价化简分析方法,该方法的复杂性随模型增长而线性增长,有效解决了其性能数量分析问题.然后,讨论了两种非基本结构到基本结构的转换规则,使得复杂的随机 Petri 网模型也可能转换为 ESPN 模型,从而使性能等价算法可应用于一般随机 Petri 网.

关键词: 随机 Petri 网;基本随机 Petri 网;性能等价;性能分析

中图分类号: TP302 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 11-1620-04

An Approach to Performance Equivalent Simplification and Analysis of Stochastic Petri Nets

LIN Chuang, QU Yang, ZHENG Bo, TIAN Li-qin

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Stochastic Petri Net (SPN) are a powerful modeling and analyzing tool for system performance evaluation. But the problem of state space's explosion of SPN limits its ability to analyze complex and large-scale systems. So it is more feasible to simplify SPN model on the basis of performance equivalence before analyzing it. In this paper, the authors define a class of SPN-Elementary SPN (ESPN) which is composed of four elementary subnets including sequence subnet, parallel subnet, choice subnet and iteration subnet, and propose a group of performance equivalence formulas for the four elementary subnets, as well as a method of performance equivalence simplification and analysis for ESPN with linear time complexity. In addition, two transforming rules are put forward to transform non-elementary subnets into combined elementary subnets such that the proposed algorithm can be used in analysis of more general SPN.

Key words: stochastic Petri nets; elementary stochastic Petri nets; performance equivalence; performance analysis

1 引言

自从 1981 年随机 Petri 网 (Stochastic Petri Net, 简称 SPN) 提出以来^[1], 它的理论和分析技术已经得到很大发展. SPN 作为分析离散事件动态系统的有力工具被广泛应用于计算机网络^[2]、资源共享系统^[3]以及并行和并发计算^[4]等研究领域.但是, SPN 模型的状态空间爆炸问题大大限制了其对大型、复杂系统的模型和分析能力, 因此对模型性能等价化简技术的研究始终是随机 Petri 网研究的主要问题之一^[5,6].

随机 Petri 网的结构形式多种多样, 但顺序、并发、选择和循环结构是构成随机 Petri 网的最常见的四种基本结构, 由这四种基本结构及它们之间的相互嵌套, 可派生出一类随机 Petri 网 - 基本随机 Petri 网 (ESPN), 如果不考虑变迁的实施速

率而只从网的结构上来看, ESPN 是自由选择网^[7] (Free Choice Net) 的子集. 许多系统的 SPN 模型本身或者其中的某些子网就是 ESPN. 因此, 对于 ESPN 的性能等价化简有助于解决 SPN 状态空间爆炸问题, 并为其他化简技术提供一个必要的基础. ESPN 具有层次结构的特点, 可以应用自底向上的层次分析方法对其进行性能等价化简. 本文给出了在随机 Petri 网模型中四种基本结构的时间性能等价化简的基本原理和性能等价公式的推导与证明, 基于这些公式, 提出了 ESPN 的时间性能等价化简算法, 该算法的复杂性随模型增长而线性增长, 是一种有效的随机 Petri 网性能分析方法. 为使该方法适用于更一般的 SPN 模型的性能分析, 一种思想是通过若干转换规则, 把复杂的非基本结构转化为四种基本结构及其组合, 这样一般的

收稿日期: 2001-12-24; 修回日期: 2002-04-01

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 60173012, 90104002); 国家重点基础研究发展规划 (973 计划) 项目 (G1999032707); 国家高技术研究发展计划 (863 计划) 课题 (No. 2001AA112080); 清华大学信息学院 985 基础创新研究基金

SPN 模型就可以用 ESPN 模型表示,从而可以对其进行性能等价分析.本文讨论了两种非基本结构到基本结构的转化规则.

2 SPN 四种基本结构及其时间性能等价化简分析

本文假定读者已掌握 SPN 的基本知识,在此不再赘述,关于 SPN 的详细介绍请参阅文献[8].顺序、并发、选择和循环是随机 Petri 网中最基本的四种结构,任何 SPN 模型都包含其中的一种或几种.本文对随机 Petri 网进行时间性能等价化简的基本思想是:把每一个基本结构看作是一个子网,分别用一个等效时间变迁来表示,该时间变迁与原来的子网具有相等的时间期望,从而得到一个简化的 SPN 模型,该模型与原模型有相同的时间性能.在作者前面的工作中^[9],已给出顺序和并发模型时间性能等价公式的推导过程,在此只对其结论做一点补充,而对于选择和循环模型将详细推导出其时间性能等价公式.

2.1 顺序结构及其时间性能等价化简分析

顺序结构到相应等效时间变迁的化简如图 1 所示,由 n 个时间变迁 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 组成的顺序结构中,设这 n 个串联变迁的延时时间为 n 个相互独立的随机变量,且分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的指数分布,即 n 个变迁的平均延时时间分别为 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$,等效时间变迁 t 的延时时间为 $1/\lambda$,

则:

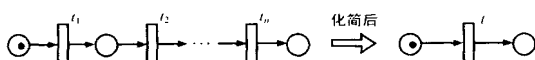
$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \quad (1)$$


图 1 随机 Petri 网的顺序结构及其时间性能等价模型

另外,若设等效时间变迁 t 的延时时间为随机变量 Y ,还可进一步证明 Y 服从 n 阶超指数分布^[10],其概率密度函数为:

$$F_Y(y) = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i e^{-\lambda_i y}, y > 0 \quad (2)$$

$$\text{其中 } m_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}, 1 \leq i \leq n$$

2.2 并发结构及其时间性能等价化简分析

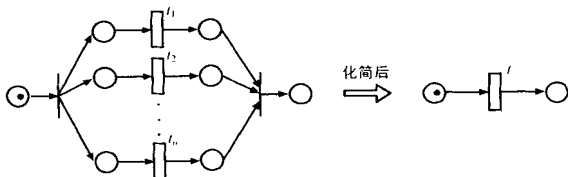


图 2 随机 Petri 网的并发结构及其时间性能等价模型

并发结构到相应等效时间变迁的化简如图 2 所示,由 n 个时间变迁 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 组成的并发结构中,设这 n 个并联变迁的延时时间为 n 个相互独立的随机变量,且分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的指数分布,即 n 个变迁的平均延时时间分别为 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$,等效时间变迁 t 的平均延时时间为 $1/\lambda$,则:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (3)$$

另外,若设等效时间变迁 t 的延时时间为随机变量 Y ,由 $f_Y(y)$ 的形式^[9]易知,随机变量 Y 服从超指数分布.

2.3 选择结构及其时间性能等价化简分析

选择结构到相应等效时间变迁的化简如图 3 所示.

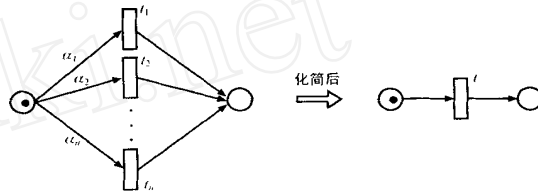


图 3 随机 Petri 网的选择结构及其时间性能等价模型

定理 1 设图 3 所示的选择结构中 n 个时间变迁 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 的延时时间为 n 个相互独立的随机变量,且分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的指数分布,即 n 个变迁的平均延时时间分别为 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$,执行变迁 t_i 的概率为 $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$,且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$,等效时间变迁 t 的平均延时时间为 $1/\lambda$,则:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \quad (4)$$

证明 设时间变迁 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 的延时时间为 n 个相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$,其概率密度函数分别为 $f_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, f_2(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, \dots, f_n(x) = \lambda_n e^{-\lambda_n x}$,设等效时间变迁 t 的延时时间为随机变量 Y ,其概率分布函数为 $F_Y(x)$,概率密度函数为 $f_Y(y)$.现引入一个随机变量 C ,由它来决定哪个变迁可以触发, C 以概率 α_i 取 t_i ,即 $P\{C = t_i\} = \alpha_i$.

由选择结构总的延时时间的物理意义易知:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n P(C = t_i) f_i(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i y}$$

$$\text{等效延时时间 } \frac{1}{\lambda} = E(Y) = \int_0^{\infty} y f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^{\infty} y \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i y} dy$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i}, \text{证毕.}$$

这个定理表明,当在 n 个变迁中选择一个变迁执行时,其总的性能等价时间为各个变迁的延时的加权算术平均值.另外,由 $f_Y(y)$ 的形式易知,随机变量 Y 服从超指数分布.

2.4 循环结构及其时间性能等价化简分析

循环结构到相应等效时间变迁的化简如图 4 所示.

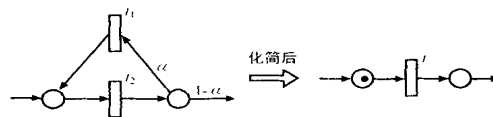


图 4 随机 Petri 网的循环结构及其时间性能等价模型

定理 2 设图 4 所示的循环结构中时间变迁 t_1 和 t_2 的延时时间为随机变量,分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布,即

t_1 的平均延时时间为 $1/\lambda_1$, t_2 的平均延时时间为 $1/\lambda_2$, 当变迁 t_1 可触发时, 其实际触发的概率为 α , 等效时间变迁 t 的平均延时时间为 $1/\lambda$, 则:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \quad (5)$$

证明 变迁 t_1 循环触发 n 次的概率为 $(1-\alpha)\alpha^n$, 其延时时间与 n 个变迁 t_1 和 $(n+1)$ 个变迁 t_2 串联触发时的情形相同. 由公式(1), n 个变迁 t_1 和 $(n+1)$ 个变迁 t_2 串联触发时的延时时间为 $\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n+1}{\lambda_2}$. 因此, 等效时间变迁 t 的延时时间

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^i \left(\frac{i}{\lambda_1} + \frac{i+1}{\lambda_2} \right) \\ &= (1-\alpha) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \frac{i}{\lambda_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \frac{i+1}{\lambda_2} \right) \\ &= (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), \text{证毕.} \end{aligned}$$

由上述证明过程可以看出, 等效时间变迁 t 的延时时间实际上是若干串联结构平均延时时间的加权平均值, 因此应服从超指数分布.

3 SPN 时间性能等价化简与分析

许多 SPN 模型都可以看作层次模型, 对它们的性能分析可采用自底向上逐步综合替代的层次分析方法. 即整个 SPN 看成由若干子网组成, 每个子网都用一个等效时间变迁表示, 从而得到一个简化的 SPN 模型, 该简化模型与原模型是性能等价的, 只要分别求出每个子网 (也就是每个等效时间变迁) 的性能参数, 就能进一步求出简化模型的性能参数, 自然也就完成了对原模型的分析. 同样, 对于每个子网, 可看作由更低层的子网组成, 因此可重复采用上述方法进行分析.

3.1 基本 SPN 性能等价化简与分析

本节讨论一类特殊 SPN—基本 SPN (Elementary Stochastic Petri Nets) 的性能等价分析方法, 基本 SPN 由 SPN 的四种基本结构组成, 其定义如下,

定义 1 基本 SPN (ESPN) 是 SPN 的真子集, 可递归定义为:

- (1) 只含一个时间变迁的 SPN 是 ESPN,
- (2) 用四种基本结构中的任何一种替换 ESPN 中的任何时间变迁所得的 SPN 是 ESPN.

ESPN 具有以下性质:

$$\begin{aligned} \forall p \in P, |p| \leq 1 \text{ 或 } \cdot(p) = \{p\}, \\ \forall t \in T, |t| \leq 1 \text{ 或 } \cdot(t) = \{t\}. \end{aligned}$$

其中,

- $\cdot t = \{p | (p, t) \in F\}$, 是变迁 t 的输入位置集合,
- $t \cdot = \{p | (t, p) \in F\}$, 是变迁 t 的输出位置集合,
- $\cdot p = \{t | (t, p) \in F\}$, 是位置 p 的输入变迁集合,
- $p \cdot = \{t | (p, t) \in F\}$, 是位置 p 的输出变迁集合.

基于分层分析的思想, 对 ESPN 进行性能等价分析的基本方法是: 先找出 ESPN 中的四种基本结构, 每个基本结构都看作一个子网, 然后利用上节给出的性能等价公式进行化简,

得到简化的 ESPN 模型, 然后对简化模型重复上述过程, 直到最后得到整个 ESPN 的等效时间变迁, 从而求得其性能参数. 显然, 该方法的复杂度随模型复杂度的增长而线性增长.

应该注意, 在模型等价化简过程中, 基本结构的等效时间变迁不再服从指数分布, 因此, 在继续运用等价化简公式进行更高层次的化简时实际上是一种近似求解. 但考虑到化简得到的等效时间变迁服从超指数分布, 并且由公式(2)可以看出, 超指数分布实际上是若干指数分布的代数叠加, 因此其性质与指数分布非常相似. 所以近似求解的结果与实际结果的误差非常小, 后面的实例分析也说明了这一点.

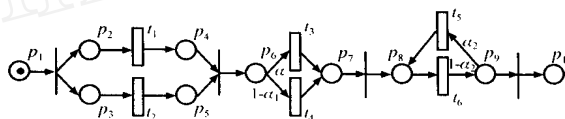


图 5

例: 求图 5 所示 SPN 模型的平均延时时间, 其中 $\alpha_1 = \frac{1}{3}$,

$\alpha_2 = \frac{9}{10}$, $\lambda = \{\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 3, \lambda_6 = 1\}$.

解: (1) 变迁 t_5, t_6 和相邻的位置构成一个基本循环结构, 可化为等效变迁 t_7 (如图 6 所示), 由公式(5)有:

$$\frac{1}{\lambda_7} = \frac{1}{1-\alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\lambda_5} + \frac{1}{\lambda_6} \right) = 10 \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{1} \right) = 13$$

(2) p_2, p_4, p_3, p_5 和相邻变迁构成基本并发结构, 将其化为等效变迁 t_8 (如图 6 所示), 由公式(3)有 $\frac{1}{\lambda_8} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$.

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = \frac{1}{14+7} = \frac{1}{6}.$$

(3) p_6, p_7 和它们之间的变迁构成选择结构. 进一步判断可知, p_6, p_7, t_3 和 t_4 构成基本选择结构, 可化为等效变迁 t_9 (如图 6 所示), 由公式(4)有 $\frac{1}{\lambda_9} = \frac{\alpha_1}{\lambda_3} + \frac{1-\alpha_1}{\lambda_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{6}.$$

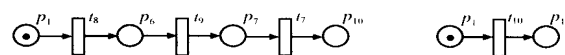


图 6

图 7

(4) 图 6 中的 SPN 模型是基本顺序结构, 可化为等效变迁 t_{10} (如图 7 所示), 由公式(1)有 $\frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{\lambda_8} + \frac{1}{\lambda_9} + \frac{1}{\lambda_7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 13 = 13 \frac{1}{3}$, 因此, 原模型的平均延时时间为 $13 \frac{1}{3}$.

用随机 Petri 网软件包 SPNP^[11] 求解图 5 所示 SPN 模型的稳定状态概率, 然后可求出位置集的平均标记数为 1.012, 系统的平均标记流速为 0.075. 由 Little 规则^[12], 系统的平均延时时间为 13.493. 前面通过性能等价算法计算所得的结果为 $13 \frac{1}{3}$, 可见误差非常小.

3.2 一般 SPN 性能等价化简与分析

一般 SPN 模型中除了四种基本结构以外, 还存在一些较复杂的结构, 无法直接用上面所述的方法进行简化. 但是, 如

果可以把这些复杂结构转化为基本结构,即用若干基本结构的组合来表示复杂结构,则可将复杂 SPN 转换为 ESPN,从而可以使用上

节所述的方法对更一般的 SPN 模型进行性能分析.非基本结构到基本结构的转化是一个非常困难的问题,探索通用的转化规则则更具挑战性.在这里,给出两种非基本结构到基本结构的转化规则:

规则 1:(参见图 8)

规则 2:(参见图 9)

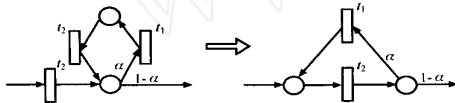


图 9 非基本结构到基本结构的转化规则 2

规则 1 中的非基本结构由并发、顺序和选择三种基本结构表示,规则 2 中则使用循环基本结构表示复杂循环结构.

在转化规则的基础上,上节所述的性能等价化简和分析方法可以应用于对一般 SPN 模型的性能分析.

4 结论

本文主要讨论了一类特殊随机 Petri 网——ESPN 的性能等价化简分析方法以及探讨了一般随机 Petri 网到 ESPN 的转化规则,把这两种技术结合起来,便可在线性时间复杂度内对许多一般的随机 Petri 网进行性能分析.对于那些无法用该方法进行整网分析的复杂随机 Petri 网,仍可用该方法对其某些子网进行性能等价化简,从而为其它分析技术提供一个必要的基础.对非基本结构到基本结构的转化问题的研究还处在初级阶段,仍有许多工作要做,多种转化规则是作者下一步要研究的问题.

参考文献:

- [1] Molloy M K. Performance analysis using stochastic Petri nets [J]. IEEE Trans On Computers, 1982, C-31(9): 913 - 917.
- [2] Lin C, Sheng L J, Wu J P, Xu M W. An integrative scheme of differentiated service: modeling and performance analysis [A]. Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems, 2000. Proceedings. 8th International Symposium on [C]. Book, News, Inc, Portland, OR: IEEE, 2000. 441 - 448.
- [3] 林闯. 一种资源共享系统的模型和近似性能分析 [J]. 计算机学报, 1997, 20(10): 865 - 871.

- [4] Balbo G. Performance issues in parallel programming [A]. Application and Theory of Petri Nets 1992, Lecture Notes in Computer Science [C]. Springer Verlag, 1992. 616: 1 - 23.
- [5] Cabodi G, Camurati P, Quer S. Reachability analysis of large circuits using disjunctive partitioning and partial iterative squaring [J]. Systems Architecture, 2001, 47(2): 163 - 179.
- [6] Zuberek W M, Rada I. Modeling and analysis of distributed state space generation for timed Petri nets [A]. Simulation Symposium, 2001. Proceedings [C]. Book News, Inc, Portland OR: IEEE, 2001. 93 - 98.
- [7] Murata D. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications [J]. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(4): 541 - 580.
- [8] 林闯. 随机 Petri 网和系统性能评价 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [9] 田立勤, 林闯, 周文江. 随机 Petri 网模型中变迁的串、并联性能等价化简技术 [J]. 电子学报, 30(8): 1134 - 1137.
- [10] Trivedi K S. Probability & statistics with reliability, queuing, and computer science applications [M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, Inc, 1982.
- [11] Gao G, Muppala J, Trivedi K S. SPNP: stochastic Petri net package [A]. Proceedings of the Petri Nets and Performance Models [C]. Kyoto, Japan: IEEE Computer Society, 1989. 142 - 151.
- [12] 林闯. 计算机网络和计算机系统的性能评价 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

作者简介:



林 闯 男, 1948 年生于辽宁省沈阳市, 1994 年获得清华大学计算机系博士学位, 清华大学计算机科学与技术系教授, 博士生导师, 计算机学报编委, 中国科学院计算机网络信息中心和北京科技大学信息工程学院兼职教授, 已出版两本专著, 在国内外有影响的期刊及会议上发表论文八十多篇. 主要研究领域是系统性能评价、计算机网络、随机 Petri 网、逻辑推理模型等.

曲 扬 男, 1978 年生于山东省济南市, 清华大学计算机科学与技术系硕士研究生, 2001 年毕业于山东大学计算机科学与技术系, 获学士学位, 感兴趣的研究方向是计算机网络, 随机 Petri 网和系统性能评价, 工作流模型.

郑 波 男, 1978 年生于福建省漳州市, 清华大学计算机科学与技术系博士研究生, 2001 年毕业于清华大学计算机科学与技术系, 获学士学位, 感兴趣的研究方向是计算机网络, 随机 Petri 网和系统性能评价.

田立勤 男, 1970 年生于陕西省定边县, 清华大学计算机科学与技术系硕士研究生, 感兴趣的研究方向是计算机网络, 随机 Petri 网和系统性能评价, 工作流模型.